



TITLE:

Gross - Prasad 予想の紹介(代数群上の保型形式)

AUTHOR(S):

渡部, 隆夫

CITATION:

渡部, 隆夫. Gross - Prasad 予想の紹介(代数群上の保型形式). 数理解析研究所講究録 1996, 965: 207-215

ISSUE DATE:

1996-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60583>

RIGHT:

Gross - Prasad 予想の紹介

渡部 隆夫 (Takao Watanabe) (阪大理)

このノートは参考文献にある 2 つの論文 [G-P], [G-P 2] の解説です.

1. Orthogonal groups.

この section では k を $\text{ch}(k) \neq 2$ であるような任意の体とする.

V を n -次元 k -ベクトル空間とし, $B: V \times V \rightarrow k$ を非退化対称双一次形式とする. V の Witt 分解を

$$V = X \oplus V_0 \oplus Y, \quad \begin{cases} X, Y \text{ は maximal totally isotropic subspaces} \\ V_0 \text{ は anisotropic subspace} \end{cases}$$

として, 基底を

$$\begin{aligned} X &= \langle e_1, \dots, e_d \rangle, & V_0 &= \langle f_1, \dots, f_{n_0} \rangle, & Y &= \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \\ B(e_i, e_j) &= B(e'_i, e'_j) = 0, & B(e_i, e'_j) &= \delta_{ij} \\ B(e_i, f_j) &= B(e'_i, f_j) = 0, & B(f_i, f_j) &= a_i \delta_{ij} \end{aligned}$$

と取る. このとき B の行列は

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_d \\ 0 & S & 0 \\ 1_d & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n_0} \end{pmatrix}$$

となる.

Definition.

- (1) $d(V) = (-1)^{[n/2]} \det(J_B) k^{\times 2} \in k^{\times} / k^{\times 2}$ を discriminant という.
- (2) $\dim V_0 \leq 2$ (resp. $\dim V_0 \leq 1$) のとき V は quasi-split (resp. split) であるという.

[例]

- (1) $k = \mathbf{C}$ のとき, 任意の B は split で

$$(V, B) \cong (V', B') \iff \dim V = \dim V'$$

- (2) $k = \mathbf{R}$ のとき, B は次の形と同型.

$$B \sim \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$(V, B) \cong (V', B') \iff \dim V = \dim V', (p, q) = (p', q')$$

- (3) k が有限体のとき, 任意の B は quasi-split で

$$(V, B) \cong (V', B') \iff \dim V = \dim V', \quad d(V) = d(V')$$

- (4) k が p -進体のとき, つねに $\dim V_0 \leq 4$ である. $(\cdot, \cdot)_k: k^{\times} \times k^{\times} \rightarrow \{\pm 1\}$ を Hilbert symbol として

$$e(V) = \prod_{i < j} (a_i, a_j)_k \quad (\text{Hasse invariant})$$

とおくと

$$(V, B) \cong (V', B') \iff \dim V = \dim V', \quad d(V) = d(V'), \quad e(V) = e(V')$$

(5) 一般の k について, $a, b \in k^\times$ とするとき,

$$Q(a) = (k, B_a): B_a(x, y) = axy \quad (\text{discriminant } a \text{ の 1 次元 quadratic space})$$

$$Q(a, b) = (E, B_{a,b}): E = \begin{cases} k(\sqrt{a}) & (a \notin k^{\times 2}) \\ k \oplus k & (a \in k^{\times 2}) \end{cases}, \quad B_{a,b}(x, y) = \frac{b}{2}(N_{E/k}(x+y) - N_{E/k}(x) - N_{E/k}(y))$$

とする. $\dim E = 2$, $d(Q(a, b)) = ak^{\times 2}$ で, 任意の 2 次元 quadratic space はこのような $Q(a, b)$ と同型になる.

$$Q(a, b) \cong Q(b) \oplus Q(-ab)$$

$$Q(a, b) \cong Q(a', b') \iff a \equiv a' \pmod{k^{\times 2}}, \quad b \equiv b' \pmod{N_{E/k}(E^\times)}$$

である.

(V, B) の特殊直交群を

$$SO(V, B) = SO(V) = \{g \in SL(V): {}^t g J_B g = J_B\}$$

とする. V の部分空間を

$$V_r = \langle e_{r+1}, \dots, e_d \rangle \oplus \langle f_1, \dots, f_{n_0} \rangle \oplus \langle e'_{r+1}, \dots, e'_d \rangle = X_r \oplus V_0 \oplus Y_r$$

$$V_r^\perp = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle = X^r \oplus Y^r$$

として

$$SO(V_r, B|_{V_r \times V_r}) = SO(V_r) \hookrightarrow SO(V): \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1_r & & & \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & & 1_r & \\ & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$GL(X^r) \hookrightarrow SO(V): \delta \mapsto \begin{pmatrix} \delta & & & \\ & 1_{d-r} & & \\ & & 1_{n_0} & \\ & & & {}^t \delta^{-1} \\ & & & & 1_{d-r} \end{pmatrix}$$

とおく. また

$$P_r = \text{Stab}_{SO(V)}(X^r) = M_r \ltimes N_r, \quad (\text{a maximal parabolic subgroup})$$

$$M_r = \text{Stab}_{SO(V)}(V_r^\perp) = GL(X^r) \times SO(V_r), \quad (\text{a Levi subgroup of } P_r)$$

$$N_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1_r & * & * & * & * \\ & 1_{d-r} & & * & \\ & & 1_{n_0} & * & \\ & & & 1_r & \\ & & & * & 1_{d-r} \end{pmatrix} \in SO(V) \right\}, \quad (\text{the unipotent radical of } P_r)$$

と定義する. N_r は次のようにかける.

$$N_r^{\text{der}} = [N_r, N_r] = \left\{ n_r(C) = \begin{pmatrix} 1_r & & & C & \\ & 1_{d-r} & & & \\ & & 1_{n_0} & & \\ & & & 1_r & \\ & & & & 1_{d-r} \end{pmatrix} : C \in \text{Alt}_r \right\} \cong X^r \wedge Y^r$$

$$N_r / N_r^{\text{der}} = \left\{ \bar{n}_r(A, B, D) = \begin{pmatrix} 1_r & A & B & & D \\ & 1_{d-r} & & -{}^t D & \\ & & 1_{n_0} & -S^{-1} {}^t B & \\ & & & 1_r & \\ & & & -{}^t A & 1_{d-r} \end{pmatrix} : \begin{matrix} A, D \in M_{r, d-r} \\ B \in M_{r, n_0} \end{matrix} \right\} \cong X^r \otimes V_1$$

N_r への M_r の作用は

$$\begin{aligned} (\delta g)n_r(C)(\delta g)^{-1} &= n_r(\delta C^t \delta) \\ (\delta g)\bar{n}_r(A, B, D)(\delta g)^{-1} &= \bar{n}_r(\delta(A, B, D)g^{-1}), \quad (\delta \in GL(X^r), g \in SO(V_r)) \end{aligned}$$

で与えられる. さらに

$$Q_r = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(X^r) \right\}, \quad \Delta_r = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL(X^r) \right\}$$

とおく.

2. Relevant pairs.

(V, B) は Section 1 と同じとする.

Definition.

(V, W) が relevant pair とは

(i) W は V の部分空間で $B|_{W \times W}$ は non-degenerate

(ii) W^\perp を W の直交補空間とすると, $\dim W^\perp$ は奇数 ($= 2r + 1$ とする) でかつ $(W^\perp, B|_{W^\perp \times W^\perp})$ は split する.

このとき V, W の何れか一つは必ず奇数次元になる. そこで V, W の中で奇数次元の方を Z_o で表し, 偶数次元の方を Z_e で表す.

$SO(V)$ による変換を法として W^\perp は次の形になる.

$$W^\perp = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus Q(\beta) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle, \quad (\beta = d(W^\perp))$$

ゆえに

$$\begin{aligned} W &= (W^\perp)^\perp \subset (X^r \oplus Y^r)^\perp = V_r \\ SO(W, B|_{W \times W}) &= SO(W) \hookrightarrow SO(V_r) \subset M_r \subset P_r \end{aligned}$$

となる. いま triple (G, H, ℓ) を

$$\begin{aligned} G &= SO(V) \times SO(W) \\ H &= (\Delta_r \times SO(W)) \ltimes N_r \hookrightarrow G: h = \delta g n \mapsto (h, g) \\ \ell: H &\rightarrow k: \text{ a morphism of } H \end{aligned}$$

で定義する. ここで ℓ は次で与えられるものとする.

$r = 0$ のとき $\ell \equiv 0$

$r \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \ell_W: V_r &\rightarrow V_r/W \rightarrow k: \text{ a linear functional } \neq 0 \\ \ell_1: X^r &\rightarrow X^r / \langle e_1, \dots, e_{r-1} \rangle \cong \langle e_r \rangle \rightarrow k: \text{ a linear functional } \neq 0 \end{aligned}$$

をとり, それから

$$\ell': N_r \rightarrow N_r/N_r^{\text{der}} \cong X^r \otimes V_r \xrightarrow{\ell_1 \otimes \ell_W} k$$

により ℓ' を定義する. このとき

$$\text{Stab}_{M_r}(\ell') = \{m \in M_r: \ell'(mnm^{-1}) = \ell'(n) \quad (\forall n \in N_r)\} = Q_r \times SO(W)$$

となる. よって ℓ' は $(Q_r \times SO(W)) \ltimes N_r$ に延長できる. さらに

$$\ell_r: \Delta_r \rightarrow k: \text{a nondegenerate morphism} \quad (\text{例えば } \ell(\delta) = \delta_{12} + \cdots + \delta_{r-1r} \text{ など})$$

を取り

$$\ell: H = (\Delta_r \times SO(W)) \ltimes N_r \rightarrow k: \ell(\delta g n) = \ell_r(\delta) + \ell'(n)$$

とおく.

Lemma.

(H, ℓ) は $SO(V)$ による変換を法として (V, W) にのみ依存する. (ℓ_W, ℓ_1, ℓ_r) のとり方には依存しない

[例]

(1) V, W が quasi-split かつ $d(V) = ak^{\times 2}, d(W) = bk^{\times 2}$ であるような relevant pair (V, W) は必ず次の形になる.

$$(QS-1, a = 1): \dim V = 2d, \dim W = 2(d-r-1) + 1$$

$$\begin{cases} V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle \oplus \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \\ W = \langle e_{r+1}, \dots, e_{d-1} \rangle \oplus Q(b) \oplus \langle e'_{r+1}, \dots, e'_{d-1} \rangle, \\ W^\perp = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus Q(-b) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle \end{cases} \quad Q(\pm b) = \langle \frac{1}{2}(e_d \pm be'_d) \rangle$$

$$(QS-1, a \neq 1): \dim V = 2d+2, \dim W = 2(d-r) + 1$$

$$\begin{cases} V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle \oplus Q(a, b) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \\ W = \langle e_{r+1}, \dots, e_d \rangle \oplus Q(b) \oplus \langle e'_{r+1}, \dots, e'_d \rangle, \\ W^\perp = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus Q(-ab) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_r \rangle \end{cases} \quad \begin{aligned} Q(a, b) &= Q(-ab) \oplus Q(b) \\ &= \langle f_1 \rangle \oplus \langle f_2 \rangle \end{aligned}$$

$$(QS-2, b = 1): \dim V = 2d+1, \dim W = 2(d-r)$$

$$\begin{cases} V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle \oplus Q(a) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \\ W = \langle e_{r+1}, \dots, e_d \rangle \oplus \langle e'_{r+1}, \dots, e'_d \rangle, \\ W^\perp = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus Q(a) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \end{cases} \quad Q(a) = \langle f_1 \rangle$$

$$(QS-2, b \neq 1): \dim V = 2d+1, \dim W = 2(d-r-1) + 2$$

$$\begin{cases} V = \langle e_1, \dots, e_d \rangle \oplus Q(a) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \\ W = \langle e_{r+1}, \dots, e_{d-1} \rangle \oplus Q(b, a) \oplus \langle e'_{r+1}, \dots, e'_{d-1} \rangle, \\ W^\perp = \langle e_1, \dots, e_r \rangle \oplus Q(ab) \oplus \langle e'_1, \dots, e'_d \rangle \end{cases} \quad \begin{aligned} Q(b, a) &= Q(-ab) \oplus Q(a) \\ &= \langle \frac{1}{2}(ae_d - be'_d) \rangle \oplus \langle f_1 \rangle \end{aligned}$$

(2) (1) の状況でさらに $\dim W \leq 1$ とすると, $SO(W) = 1, r = d$ で

$$H = \Delta_d N_d$$

は $SO(V)$ の maximal unipotent subgroup (これを U_V とかく) になる. ゆえに ℓ として U_V の nondegenerate morphism ℓ_{U_V} が取れる.

(3) (1) の (V, W) から次の relevant pair が生じる.

$$\begin{array}{ccccc} (V, W) & & (G, H, \ell) \\ (Z_e, Q(d(Z_o))) & \rightsquigarrow & (Z_o, 0) & (SO(Z_e), U_{Z_e}, \ell_{U_{Z_e}}) & (SO(Z_o), U_{Z_o}, \ell_{U_{Z_o}}) \end{array}$$

このとき

$$U = U_{Z_e} \times U_{Z_o} \quad \text{a maximal unipotent subgroup of } G$$

$$\ell_0 = \ell_{U_{Z_e}} \otimes \ell_{U_{Z_o}} : U \rightarrow k : \quad \text{a nondegenerate morphism}$$

とおく.

Lemma.

(V, W) が quasi-split relevant pair のとき, H は G の spherical subgroup である.

以下, k を局所体とし, additive character $\psi: k \rightarrow \mathbf{C}^1$, ($\psi \neq 1$) を固定する. このとき, 与えられた relevant pair (V, W) から局所コンパクト群 G, H と character $\theta = \psi \circ \ell: H \rightarrow \mathbf{C}^1$ が定まる.

(V, W) が quasi-split のとき, \widehat{U} を U の nondegenerate character のなす集合とし, T を G の対角行列からなる maximal torus とする. T は \widehat{U} 上共役で作用する. \widehat{U}/T を \widehat{U} のなかの T -orbit のなす集合とする. とくに, $\theta_0 = \psi \circ \ell_0$ の T -orbit を θ_0^T で表す.

Proposition.

(V, W) が quasi-split relevant pair でかつ $\dim Z_e \geq 4$ のとき, \widehat{U}/T は 構造群 $N_{E/k}(E^\times)/(k^\times)^2$ の principal homogeneous space になる. ここで $E = k[x]/(x^2 - d(Z_e))$ とする.

Definition.

(V, W) を relevant pair とし, $(G, H, \theta = \psi \circ \ell)$ を対応する triple とする. G の許容表現 (π, V_π) に対し

$$\text{Hom}_H(\pi, \theta) = \{\eta: V_\pi \rightarrow \mathbf{C} \text{ continuous linear functional: } \eta(\pi(h)v) = \theta(h)\eta(v) \quad (\forall h \in H)\}$$

とおく. さらに (V, W) が quasi-split ならば,

$$\text{Hom}_U(\pi, \theta_0) = \{\eta: V_\pi \rightarrow \mathbf{C} \text{ continuous linear functional: } \eta(\pi(u)v) = \theta_0(u)\eta(v) \quad (\forall u \in U)\}$$

とおく. ここで k が archimedean ならば許容表現 (π, V_π) は Casselman - Wallach の意味での smooth Frechet representation of moderate growth のカテゴリーで考える.

定理 (Ginzburg, Piatetski-Shapiro and Rallis)

k が nonarchimedean, (V, W) が quasi-split で π が既約ならば $\dim \text{Hom}_H(\pi, \theta) \leq 1$

定理 (Shalika)

(V, W) が quasi-split で π が既約ならば $\dim \text{Hom}_U(\pi, \theta_0) \leq 1$

($\dim \text{Hom}_U(\pi, \theta_0) = 1$ となる π を θ_0 -generic という.)

3. Vogan L-packets

W_k を局所体 k の Weil 群, $W'_k = W_k \ltimes \mathbf{C}$ を Weil-Deligne 群とする.

Quasi-split relevant pair (V, W) を固定し, それから生じる triple を (G, H, θ) とする. G の L -群を ${}^L G$ とかく. 具体的には

$${}^L G = \begin{cases} SO_{2d}(\mathbf{C}) \times Sp_{2(d-r)}(\mathbf{C}) & (\text{QS-1}, a = 1) \\ O_{2d+2}(\mathbf{C}) \times Sp_{2(d-r)}(\mathbf{C}) & (\text{QS-1}, a \neq 1) \\ Sp_{2d}(\mathbf{C}) \times SO_{2(d-r)}(\mathbf{C}) & (\text{QS-2}, b = 1) \\ Sp_{2d}(\mathbf{C}) \times O_{2(d-r)+2}(\mathbf{C}) & (\text{QS-2}, b \neq 1) \end{cases}$$

となる. また定数 $D \bmod k^{\times 2}$ を

$$D = d(Z_e) = \begin{cases} a & (\text{QS-1}) \\ b & (\text{QS-2}) \end{cases}$$

で定め, 局所類体論により $k(\sqrt{D})/k$ に対応する character を ω_D とする. i.e.

$$\omega_D: W_k \rightarrow \{\pm 1\}, \quad \ker \omega_D = W_k \cap \text{Gal}(\bar{k}/k(\sqrt{D}))$$

Definition.

準同型 $\varphi: W'_k \rightarrow {}^L G$ が次の 3 条件を満たすとき許容的という.

(i) φ は $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -compatible, i.e. $\det \varphi((a, w)) = \omega_D(w)$ ($\forall (a, w) \in W_k$).

(ii) $\varphi(C)$ は ${}^L G$ の unipotent な元からなる.

(iii) $\varphi(W_k)$ は ${}^L G$ の semisimple な元からなる.

許容準同型のなす集合に同値関係を

$$\varphi \sim \varphi' \iff \exists g \in {}^L G^0 \text{ s.t. } \varphi(w') = g\varphi'(w')g^{-1} \quad (\forall w' \in W'_k)$$

で定め

$$\Phi({}^L G) = \{ \text{許容準同型 } W'_k \rightarrow {}^L G \text{ の同値類} \}$$

とおく.

Definition.

$\varphi \in \Phi({}^L G)$ に対し

$$C_\varphi = \{g \in {}^L G^0: g\varphi(w') = \varphi(w')g \quad (\forall w' \in W'_k)\}$$

$$A_\varphi = \pi_0(C_\varphi) = C_\varphi / C_\varphi^0: C_\varphi \text{ の連結成分のなす群}$$

$$\hat{A}_\varphi = \{\chi: A_\varphi \text{ の有限次元既約表現}\} / \sim, \quad \chi \sim \chi' \iff \exists g \in C_\varphi \text{ s.t. } \chi(gag^{-1}) = \chi'(a) \quad (\forall a \in A_\varphi)$$

とおく. このとき

$$\Phi_{\text{pure}}({}^L G) = \{(\varphi, \chi): \varphi \in \Phi({}^L G), \chi \in \hat{A}_\varphi\}$$

の元を pure Langlands parameter という.

Remark.

$G = SO(V) \times SO(W)$ の場合は

$$A_\varphi \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

の形になる ([G-P, Corollary 6.6 and 7.7]) から $\hat{A}_\varphi = \text{Hom}(A_\varphi, \{\pm 1\})$.

Definition.

2つの quadratic space V_α, W_α が

$$\dim V_\alpha = \dim V, \quad \dim W_\alpha = \dim W, \quad d(V_\alpha) = d(V), \quad d(W_\alpha) = d(W)$$

をみたすとき, 群 $G_\alpha = SO(V_\alpha) \times SO(W_\alpha)$ を G の pure inner form という.

Remark.

(1) Pure inner form の k -同型類は Galois cohomology

$$H^1(k, G) \cong H^1(k, SO(V)) \times H^1(k, SO(W)) \cong \{\pm 1\} \times \{\pm 1\}$$

の元と 1 対 1 に対応する. Pure inner form の中で quasi-split になるのは G 自身だけである.

(2) (V_α, W_α) は必ずしも relevant pair にはならない. 実際 k が p -進体の時には

$$(V_\alpha, W_\alpha) \text{ が relevant pair} \iff \frac{e(V_\alpha)}{e(V)} = \frac{e(W_\alpha)}{e(W)}$$

がいえ ([G-P2, Proposition 8.4]).

(V_α, W_α) が relevant pair のとき, 対応する triple を $(G_\alpha, H_\alpha, \theta_\alpha)$ とおく.

いま

$$\Pi(G_\alpha) = \{G_\alpha \text{ の既約許容表現の同型類} \},$$

$$\Pi(G/k) = \bigsqcup_{\alpha \in H^1(k, G)} \Pi(G_\alpha)$$

$$\Pi_\varphi(G_\alpha) = \varphi \text{ に対応する } G_\alpha \text{ の (conjectural) Langlands } L\text{-packet},$$

$$\Pi_\varphi = \bigsqcup_{\alpha \in H^1(k, G)} \Pi_\varphi(G_\alpha)$$

とおく.

Conjecture 1([G-P])

(1) 任意の $\varphi \in \Phi({}^L G)$ に対し,

$$\sum_{\pi \in \Pi_\varphi(G)} \dim \text{Hom}_U(\pi, \theta_0) \leq 1$$

となる. 左辺の値は T -orbit $\theta_0^T \in \widehat{U}/T$ の選び方によらない.

(左辺の値が 1 になるとき φ は generic であるということにする)

(2) $\text{Ad}: {}^L G \rightarrow \text{Aut}(\text{Lie}({}^L G^0))$ を adjoint 表現とすると

$$\varphi \text{ は generic} \iff L(s, \text{Ad} \circ \varphi) \text{ は } s=1 \text{ で正則.}$$

が成り立つ.

Conjecture 2([V])

全単射

$$\Phi_{\text{pure}}({}^L G) \rightarrow \Pi(G/k): (\varphi, \chi) \mapsto \pi(\varphi, \chi)$$

が存在して次を満たす.

(i) 各 $\varphi \in \Phi({}^L G)$ に対し, $\Pi_\varphi = \{\pi(\varphi, \chi): \chi \in \widehat{A}_\varphi\}$ となる. (i.e. Langlands L -packet と consistent)

(ii) $\varphi \in \Phi({}^L G)$ が generic で, $\chi_0 \in \widehat{A}_\varphi$ が trivial character ならば $\pi(\varphi, \chi_0)$ は $\Pi_\varphi(G)$ のなかの θ_0 -generic 表現である.

((ii) からこの全単射は T -orbit θ_0^T の取り方に依存する. Π_φ を Vogan L -packet とよぶ)

Conjecture 3([G-P 2])

$\pi = \pi(\varphi, \chi) \in \Pi_\varphi$ が G_α の表現であるとき

$$L(\pi) = \begin{cases} \text{Hom}_{H_\alpha}(\pi, \theta_\alpha) & ((V_\alpha, W_\alpha) \text{ が relevant pair のとき}) \\ 0 & ((V_\alpha, W_\alpha) \text{ が relevant pair でないとき}) \end{cases}$$

とおく. このとき

(1) 任意の $\varphi \in \Phi({}^L G)$ に対し $\sum_{\pi \in \Pi_\varphi} \dim L(\pi) \leq 1$ である.

(2) φ が generic ならば $\sum_{\pi \in \Pi_\varphi} \dim L(\pi) = 1$ である.

φ が generic のとき, この予想から Π_φ の元 π_1 で $\dim L(\pi_1) = 1$ となるものがただ一つ存在する. Conjecture 2 の全単射 $\widehat{A}_\varphi \rightarrow \Pi_\varphi$ により $\pi_1 = \pi(\varphi, \chi_1)$ と表わすとき, χ_1 は次の様なものになると予想されている. いま ${}^L G$ は symplectic 群と直交群の直積であるから, ${}^L G = \text{Sp}(M_1) \times O(M_2)$ とかける. ここで M_1, M_2 は \mathbb{C} -ベクトル空間である. そこで

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2: W'_k \rightarrow \text{Sp}(M_1) \times O(M_2)$$

とするとき, これから symplectic 表現

$$\bar{\varphi} = \varphi_1 \otimes \varphi_2: W'_k \rightarrow Sp(M_1) \times O(M_2) \rightarrow Sp(M_1 \otimes M_2)$$

が定義される. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in C_\varphi$ を A_φ の元を代表するような involution として

$$\begin{aligned} M_1 \otimes M_2(\gamma, -1) &= M_1 \otimes M_2 \text{ における } \gamma \text{ の } -1 \text{ 固有空間} \\ M_i(\gamma_i, -1) &= M_i \text{ における } \gamma_i \text{ の } -1 \text{ 固有空間} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

とおくと, 部分表現

$$\bar{\varphi}^\gamma = (\bar{\varphi}, M_1 \otimes M_2(\gamma, -1)), \quad \varphi_i^\gamma = (\varphi_i, M_i(\gamma_i, -1)) \quad (i = 1, 2)$$

が得られる. また局所類体論から生じる標準写像

$$W'_k \rightarrow W_k \rightarrow W_k/[W_k, W_k] \cong k^\times$$

により $-1 \in k^\times$ に移るような W'_k の元 w_{-1} を一つとる. これから $\chi_1: A_\varphi \rightarrow \{\pm 1\}$ を

$$\chi_1(\gamma) = \varepsilon(\bar{\varphi}^\gamma) \det(\varphi_2(w_{-1}))^{\dim(\varphi_1^\gamma)/2} \det(\varphi_2^\gamma(w_{-1}))^{\dim \varphi_1/2}$$

で定義する. ここで $\varepsilon(\bar{\varphi}^\gamma) \in \{\pm 1\}$ は $\bar{\varphi}^\gamma$ の local constant とする. ([G-P, Proposition 9.5]).

Conjecture 4([G-P 2])

φ が generic ならば $\dim L(\pi(\varphi, \chi_1)) = 1$ である.

次元が小さい場合には $GL(2)$ に関する結果から予想が正しいことが解る. すなわち

定理

次の場合に Conjecture 3, 4 は正しい.

- $\dim V = 3$
- $\dim V = 4$ かつ $\dim W = 1$

また $\dim V = 4$ かつ $\dim W = 3$ のとき Conjecture 3 は正しい.

Remark.

(1) $\pi(\varphi, \chi_1) \in \Pi_\varphi(G_\alpha)$ となる G_α は次のように決まる. Kottwitz duality と自然な写像

$$H^1(k, G) \times \pi_0(Z({}^L G^0)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}, \quad \pi_0(Z({}^L G^0)^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}) \rightarrow \pi_0(C_\varphi) = A_\varphi$$

により $\chi_1 \in \hat{A}_\varphi$ は $H^1(k, G)$ の元 α を定める. 具体的には

$$(V_\alpha, W_\alpha), \quad \begin{cases} \dim V_\alpha = \dim V, & d(V_\alpha) = d(V), & e(V_\alpha) = \chi_1(-1_V, 1_W)e(V) \\ \dim W_\alpha = \dim W, & d(W_\alpha) = d(W), & e(W_\alpha) = \chi_1(1_V, -1_W)e(W) \end{cases}$$

で定まる. 今の場合

$$\chi_1(-1_V, 1_W) = \chi_1(1_V, -1_W) = \varepsilon(\bar{\varphi}) \det(\varphi_2(w_{-1}))^{\dim \varphi_1/2}$$

となるから, とくに

$$G_\alpha = G \iff \varepsilon(\bar{\varphi}) \det(\varphi_2(w_{-1}))^{\dim \varphi_1/2} = 1$$

がわかる.

(2) $\dim W^\perp = 1$ (i.e. $r = 0$) の場合を考える. (V_α, W_α) が relevant pair ならば $H_\alpha = SO(W_\alpha) \hookrightarrow G_\alpha = SO(V_\alpha) \times SO(W_\alpha)$ は diagonal embedding かつ $\theta_\alpha \equiv 1$ である. ゆえに $\pi = \sigma_1 \times \sigma_2 \in \Pi(G_\alpha) = \Pi(SO(V_\alpha)) \times \Pi(SO(W_\alpha))$ に対し

$$L(\pi) = \text{Hom}_{H_\alpha}(\pi, \theta_\alpha) \cong \text{Hom}_{H_\alpha}(\sigma_1, \sigma_2^\vee), \quad (\sigma_2^\vee \text{ は } \sigma_2 \text{ の反傾表現})$$

すなわち $L(\pi)$ は $\sigma_1|_{H_\alpha}$ の分解の様子を表わし, Conjecture 3, 4 は

$$\mathrm{Hom}_U(\pi_0, \theta_0) \neq \{0\} \implies \mathrm{Hom}_{H_\alpha}(\pi_1, \theta_\alpha) \neq \{0\}$$

を導く.

4. The global conjecture

この section では k を global field とする. (V, W) を $\dim W^\perp = 1$ であるような relevant pair とする. これに対応する triple を (G, H, ℓ) とする. 前の Remark (2) と同様に

$$H = SO(W) \hookrightarrow G = SO(V) \times SO(W): \text{diagonal embedding} \\ \ell \equiv 0$$

である. k の各素点 v に対し, $G_v = G(k_v)$, $H_v = H(k_v)$ などとする. \mathbb{A} を k のアデール環として, $G(\mathbb{A})$, $H(\mathbb{A})$ をアデール群とする.

k の (conjectural) Langlands group を L_k として, G の global tempered Langlands parameter

$$\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2: L_k \rightarrow {}^L G = Sp(M_1) \times O(M_2)$$

をとる. 各 v に対し, φ から従う local tempered Langlands parameter を

$$\varphi_v: W'_{k_v} \rightarrow {}^L G = Sp(M_1) \times O(M_2)$$

とおく. φ_v に対応する local Vogan L -packet を Π_{φ_v} とする. ここで任意の v で次が成り立つと仮定する.

(i) φ_v は generic

(ii) Conjecture 3 より $\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}$ を $\dim L(\pi_v) = 1$ となる表現とすると, $\pi_v \in \Pi_{\varphi_v}(G_v)$

$\pi = \otimes'_v \pi_v$ は $G(\mathbb{A})$ の admissible 表現で

$$\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi, \mathbb{C}) \cong \otimes_v L(\pi_v) \cong \mathbb{C}$$

を満たす. さて φ に対して, C_φ , A_φ , $\bar{\varphi}$ を local の場合と同様に定義する. 更に A_φ の元を代表する involution $\gamma \in C_\varphi$ に対して, $\bar{\varphi}^\gamma = (\bar{\varphi}, M_1 \otimes M_2(\gamma, -1))$ を $\bar{\varphi}$ の部分 symplectic 表現とし, これから生じる global root number を

$$\varepsilon(\bar{\varphi}^\gamma) = \prod_v \varepsilon(\bar{\varphi}_v^\gamma)$$

で表す.

Conjecture 5 ([G-P])

上で構成した π が保型表現であるための必要充分条件は任意の $\gamma C_\varphi^0 \in A_\varphi$ について $\varepsilon(\bar{\varphi}^\gamma) = 1$ となることである. このとき π は $G(\mathbb{A})$ の discrete 保型表現で multiplicity 1 をもつ.

いま π が保型表現で, $G(\mathbb{A})$ 上の保型形式の空間に実現されているとする. $f \in \pi$ に対して, 積分

$$\ell_H(f) = \int_{H \backslash H(\mathbb{A})} f(h) dh$$

が収束すると仮定する. (π が cuspidal ならばこれはいつも収束する). ℓ_H が恒等的に 0 でなければ, それは 1 次元空間 $\mathrm{Hom}_{H(\mathbb{A})}(\pi, \mathbb{C})$ の基底を与える.

Conjecture 6 ([G-P])

$\ell_H \neq 0$ であるための必要充分条件は $L(1/2, \bar{\varphi}) \neq 0$

REFERENCES

- [G-P] B. Gross and D. Prasad, *On the decomposition of a representation of SO_n when restricted to SO_{n-1}* , Can. J. Math. **44** (1992), 974 - 1002.
- [G-P 2] ———, *On irreducible representations of $SO_{2n+1} \times SO_{2m}$* , Can. J. Math. **46** (1994), 930 - 950.
- [V] D. A. Vogan, *The local Langlands conjecture*, Contemporary Math. **145** (1993), 305 - 379.